نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **تساوی دو تابع**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دامنه هر یک از توابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x-۴}{\sqrt{(x-۲)(x-۳)}} \Rightarrow (x-۲)(x-۳) > ۰$$

$$\Rightarrow x > ۳ \text{ یا } x < ۲$$

$$g(x) = \frac{x-۴}{\sqrt{x-۲}\sqrt{x-۳}} \Rightarrow \begin{cases} x-۳ > ۰ \Rightarrow x > ۳ \\ x-۲ > ۰ \Rightarrow x > ۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} x > ۳$$

برای تساوی دو تابع f و g باید دامنه آن‌ها با هم یکسان شود، پس مجموعه $\{x|x < ۲, x \in R\}$ باید از دامنه f حذف شود تا دو تابع مساوی شوند.

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۳

شرط آنکه دو تابع مساوی باشند، آن است که:

۱- دامنه دو تابع یکسان باشد.

۲- برای هر x از دامنه، مقادیر دو تابع با هم برابر باشند.

این دو شرط باید هر دو برقرار باشند، یعنی اگر یکی برقرار نباشد، دو تابع مساوی نیستند.

$$۱)\ D_f = D_g = R\ ,\ f(-۲) = ۲,\ g(-۲) = -۲$$
$$\Rightarrow f(-۲) \neq g(-۲)$$

$$۲)\ D_f = D_g = R - \{۰\}, f(-\frac{۱}{۲}) = ۱, g(-\frac{۱}{۲}) = -۱$$
$$\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}) \neq g(-\frac{۱}{۲})$$

$$۴)\ D_f = R,\ D_g = R - \{۰\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

$$۳)\ D_f = R,\ |x| + ۱ = ۰ \Rightarrow |x| = -۱$$ معادله جواب ندارد

$$\Rightarrow D_g = R \Rightarrow D_f = D_g = R$$

$$f(x) = |x| - ۱\ ,\ \ g(x) = \frac{x^۲ - ۱}{|x| + ۱} \xrightarrow{x^۲ = |x|^۲}$$

$$g(x) = \frac{|x|^۲ - ۱}{|x| + ۱} = \frac{(|x| - ۱)(|x| + ۱)}{|x| + ۱}$$

$$\Rightarrow g(x) = |x| - ۱ \Rightarrow f(x) = g(x)$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

از تساوی f و g نتیجه می‌گیریم که $b = -۲$. برای انتخاب a باید حواسمان به دامنه دو تابع باشد. دامنه تابع f را در دو حالت زیر به‌دست می‌آوریم:

۱) $a \geq -۲$

$D_f = [-۲, +\infty)$

x		b = −۲		a	
$(x-a)^۲(x-b)$	−	۰	+	۰	+

۲) $a < -۲$

$D_f = \{a\} \cup [-۲, +\infty)$

x		a		b = −۲	
$(x-a)^۲(x-b)$	−	۰	−	۰	+

از طرفی چون $D_g = [-۲, +\infty)$ است، پس برای آن‌که $D_f = D_g$ باشد، باید $a \in [-۲, +\infty)$ باشد، پس:

$$a \geq -۲ \xrightarrow{+b} a + b \geq \underbrace{-۲ + b}_{-۴} \Rightarrow a + b \geq -۴$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم $D_g = \{۳\}$ است. پس باید D_f هم فقط شامل $x = ۳$ باشد.

$$\begin{cases} x - a \geq ۰ \Rightarrow x \geq a \\ -۲x + b \geq ۰ \Rightarrow ۲x \leq b \Rightarrow x \leq \frac{b}{۲} \end{cases} \Rightarrow a \leq x \leq \frac{b}{۲}$$

برای آن‌که دامنهٔ f مجموعهٔ تک عضوی $\{۳\}$ باشد باید $a = \frac{b}{۲} = ۳$ باشد، پس $b = ۶$ و $a = ۳$ است.

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x) = \sqrt{x - ۳} + \sqrt{-۲x + ۶} + c$ درمی‌آید. مقدار دو تابع در $x = ۳$ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$f(۳) = g(۳) \Rightarrow a = c \xrightarrow{a=۳} c = ۳$$

پس:

$$a + ۲b + c = ۳ + ۲ \times (۶) + ۳ = ۱۸$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

دو تابع را برابر در نظر می‌گیریم. البته دقت داریم که $D_f = R - \{-۳\}$ است پس مخرج g باید فقط یک ریشه ۳- داشته باشد تا دامنه‌ها برابر شوند، یعنی باید $(x+۳)^۲$ باشد، پس باید مخرج $(x+۳)^۲ = x^۲ + ۶x + ۹$ باشد یعنی: $c = ۶$ و $d = ۹$،

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x-a}{(x+۳)^۲} = \frac{b}{x+۳} \xrightarrow{x \neq -۳} \frac{x-a}{x+۳} = \frac{b}{۱}$$

$$\Rightarrow x - a = bx + ۳b \Rightarrow \begin{cases} b = ۱ \\ a = -۳ \end{cases}$$

پس:

$$\frac{abc}{d} = \frac{(-۳)(۱)(۶)}{۹} = \frac{-۱۸}{۹} = -۲$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا باید دامنه توابع برابر باشد:

$$D_g : R - \{\pm a\} \quad ، \quad D_f : R - \{-a\}$$

که برای برابر بودن دامنه‌ها، a باید صفر باشد.

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^۲ - (c-۱)x + ۶ - b}{x} \\ g(x) = \dfrac{x^۳ + bx}{x^۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^۲ - (c-۱)x + ۶ - b}{x} = \frac{x^۳ + bx}{x^۲}$$

$$\Rightarrow x^۴ - (c-۱)x^۳ + (۶-b)x^۲ = x^۴ + bx^۲ \Rightarrow \begin{cases} c - ۱ = ۰ \Rightarrow c = ۱ \\ ۶ - b = b \Rightarrow b = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = ۰ + ۳ + ۱ = ۴$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲ \\ x + ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq ۲ \Rightarrow D_g = [۲, +\infty)$$

$$x^۲ - ۴ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq ۴ \Rightarrow |x| \geq ۲$$
$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -۲] \cup [۲, +\infty)$$

با توجه به اینکه دو تابع دامنه یکسانی ندارند موارد الف و پ نادرست خواهند بود.

مورد (ب) درست است. زیرا:

$$\xrightarrow{x \geq ۲} \sqrt{x-۲} \times \sqrt{x+۲} = \sqrt{x^۲ - ۴}$$
$$\xrightarrow{x \geq ۲} f(x) = g(x)$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

با فرض تساوی دامنه‌ها داریم:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{ax^2 + 2ax} \\ g(x) = \sqrt{(a^2 - 2)x^2 + bx} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2 = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1,\ a = 2 \\ 2a = b \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow b = -2 \\ a = 2 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \end{cases}$$

با توجه به این‌که دو مقدار برای a حاصل شد باید بررسی کنیم کدام یک قابل قبول است. (تساوی دامنه‌ها را بررسی می‌کنیم):

$$a = 2 : \begin{cases} f(x) = \sqrt{2x}\sqrt{x+2} \Rightarrow D_f : x \geq 0 \\ g(x) = \sqrt{2x^2 + 4x} \Rightarrow Dg : x \leq -2 \text{ یا } x \geq 0 \end{cases}$$

دامنهٔ دو تابع برابر نیست. پس دو تابع مساوی نیستند. بنابراین $a = -1$ و $b = -2$ قابل قبول است. (بررسی کنید.)

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»:

$0 \in D_f \quad , \quad 0 \notin D_g \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow$ برابر نیستند

گزینهٔ «۲»: $D_f = D_g = R$

اما ضابطه‌ها با هم برابر نیستند چون حاصل تابع $f(x)$ همیشه نامنفی است اما حاصل تابع $g(x)$ می‌تواند منفی باشد، در نتیجه نابرابرند.

گزینهٔ «۳»:

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1 = g(x)$$

$$\Rightarrow D_f = D_g = [1\ ,\ +\infty)$$

در نتیجه دو تابع با هم مساوی هستند.

گزینهٔ «۴»:

$$D_f = R - \{2\ ,\ 3\} \quad , \quad D_g = R - \{3\}$$

چون دامنه‌ها یکسان نیستند در نتیجه دو تابع با هم برابر نیستند.

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم برای این‌که دو تابع با هم مساوی باشند، باید دو شرط زیر همزمان برقرار باشند:

۱) $D_f = D_g$

۲) ضابطه‌ی $f(x)$ با $g(x)$ برابر باشد.

حالا به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی «۱»: $\begin{cases} D_f = R = D_g \\ f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x) \end{cases}$

هر دو شرط برقرار است، بنابراین $f(x)$ و $g(x)$ با هم برابرند.

گزینه‌ی «۲»: $\begin{cases} D_f = (0, +\infty) = D_g \\ g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = f(x) \end{cases}$

هر دو شرط برقرار است، بنابراین $f(x)$ و $g(x)$ با هم برابرند.

گزینه‌ی «۳»: $\begin{cases} D_f = R = D_g \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \\ \quad = \sqrt[3]{(x-1)^3} = (x-1) = g(x) \end{cases}$

گزینه‌ی «۴»: $\begin{cases} D_f = R \ , \ D_g = R - \{1\} \\ g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1 \end{cases}$

در گزینه‌ی «۴»، با این‌که ضابطه‌های توابع f و g با هم برابرند، اما این دو تابع با هم برابر نیستند، زیرا دامنه‌های آن‌ها با هم برابر نیست (شرط اول برقرار نیست.)